American Journal of Engineering Research (AJER)
e-ISSN: 2320-0847 p-ISSN : 2320-0936
Volume-11, Issue-09, pp-68-72
www.ajer.org
Research Paper Open Access

Control Problem With Minimum Energyelastic Vibrations Of A Beam

GasimovG.G., MamedovR.S., MirzoevaG.S.
Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, assosiatiive professor
Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, assosiatiive professor
Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, master student
Corresponding Author: ***Gasimov G.G.***

Аннотация.*Рассматривается решение задачи об управлении с минимальной энергией упругихколебаний балки, которые описываются уравнениемс частными производнымичетвертого порядка. При этом исследуется случай,когда управляющий параметр являетсяраспределенным, азадача оптимального управления состоит в определении управляющего параметра из класса допустимых управлений,таким образом, чтобы в конечном моменте времени былобы достигнуто желаемое состояние объекта и при этом затрата энергии должна быть минимальной.*
Решение соответствующейкраевой задачиищетсяввиде ряда Фурье, и поставленная задача оптимальногоуправленияформулируется в бесконечномерном фазовом пространстве и в результате получается задача оптимального управления в функциональном пространстве.
Ключевые слова:*управление с минимальной энергией,оптимального управления,колебанияупругой балки, метод Фурье,проблема моментов, краевой задача.*
Annotation. *The solution of the control problem with the minimum energy of elastic vibrations of the beam, which are described by a fourth-order partial differential equation, is considered. In this case, we study the case when the control parameter is distributed, and the problem of optimal control is to determine the control parameter from the class of admissible controls in such a way that at the final moment of time the desired state of the object would be achieved and, at the same time, the energy consumption should be minimum.*
The solution of the corresponding boundary value problem is sought in the form of a Fourier series, and the formulated optimal control problem is formulated in an infinite-dimensional phase space, and as a result, an optimal control problem is obtained in the functional space.Taking into account the given condition at the final moment of time, the solution of the obtained problem is reduced to the problem of moments. This allows, according to Levy's theorem, to find the control parameter in an analytical form.

Keywords: *minimum energy control, optimal control, elastic beam vibrations, Fourier method, moment problem, boundary value problem.*

Date of Submission: 01-09-2022 Date of acceptance: 13-09-2022

I.ПОСТАНОВКАЗАДАЧИ

Рассмотрим краевую задачу для уравненияпоперечныхколебаний балки [1]:

$$a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=p(t,x),\quad 0<t<T,\quad 0<x<1, \qquad (1)$$

$$u(0,x)=\varphi_0(x),\quad u_t(0,x)=\varphi_1(x),\quad 0\le x\le l, \qquad (2)$$

$$u(t,0)=0,\quad u_{xx}(t,0)=0,\quad 0<t<T, \qquad (3)$$

$$u(t,1)=0,\quad u_{xx}(t,1)=0,\quad 0<t<T, \qquad (4)$$

где $\varphi_0\in W_2^2(0,1)$ $\varphi_1\in L_2(0,1)$ - заданныефункции, а функция $p(t,x)\in L_2(Q)$, $Q=\{0<t<T,\,0<x<1\}$ управляющий параметр и подлежит определению.

При заданных условиях каждое конкретное допустимое управление определяет единственное обобщенное решение $u(t,x)\in W_2^{1,2}(Q)$,которое для любой функции $\Phi(t,x)\in W_2^{1,2}(Q)$ такое, что $\Phi(T,x)=0$, $\Phi_x(t,0)=0$, $\Phi_x(t,1)=0$ удовлетворяет интегральному тождеству [2]:

$$\int_0^T\int_0^1\left[-\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial t}+a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right]dxdt\,,$$

$$-\int_0^1\varphi_1(x)\Phi(0,x)dx=\int_0^T\int_0^1 p(t,x)\Phi(t,x)dxdt\,,\quad(5)$$

причём выполнение условия $u(0,x)=\varphi_0(x)$ понимается в смысле

$$\lim_{t\to 0+}\int_0^T\left(u(0,x)-(x)\right)^2dx=0\,.$$

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти управляющий параметртакой, чтобы соответствующее ему решение $u(t,x)$ задачи (1)-(4) удовлетворяло условию

$$u(T,x)=\psi(x)\quad(6)$$

и при этом функционал

$$I[p]=\int_0^T\int_0^1 p^2(t,x)dxdt\quad(7)$$

принимал наименьшее возможное значение.

II.ФОРМУЛИРОВКАЗАДАЧИВБЕСКОНЕЧНОМЕРНОМПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим в $L_2(0,1)$ ортонормированную систему функций $X_n(x)=\dfrac{1}{\omega_n}\sin\lambda_n x$, $n=1,2,...,$ где $\lambda_n=\pi n$, $n=1,2,...$собственные значения краевой задачи:

$$\frac{d^4X}{dx^4}-\lambda^4X=0,\quad 0<x<1,\quad(8)$$

$$X(0)=X''(0)=0,\quad X(1)=X''(1)=0,\quad(9)$$

а $\omega_n^2=\dfrac{2\lambda_n-\sin 2\lambda_n}{4\lambda_n}$.

Учитывая это решение краевой задачи (1)-(4) можем искать в виде ряда Фурье

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)X_n(x)\,,\quad u_n(t)=\int_0^1 u(t,x)X_n(x)dx\,.\quad(10)$$

Умноживобе части уравнения (1) на $X_n(x)$ проинтегрируем по x от 0 до 1:

$$a^2\int_0^1\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}X_n(x)dx+\int_0^1 u(t,x)X_n^4(x)dx+$$

$$+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}X_n(x)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}X_n'(x)+\frac{\partial u}{\partial x}X_n''(x)-u\cdot X_n'''(x)\right)\Bigg|_0^1=\int_0^1 p(t,x)X_n(x)dx\,.$$

Учитывая (8),и граничные условия (3),(4) и (9) имеем:

$$\frac{d^2}{dt}\int_0^1 u(t,x)X_n(x)dx+\lambda_n^4\int_0^1 u(t,x)X_n(x)dx=\int_0^1 p(t,x)X_n(x)dx\,,$$

или

$$\ddot{u}_n(t)+a^2\lambda_n^4u_n(t)=p_n(t)\,,\quad(11)$$

где $p_n(t)$ коэффициенты Фурье функции $p(t,x)$.

Из начальных условий (2) получаем,что уравнение (11) решается с начальными условиями:

$$u_n(0)=\varphi_{0n}, u_n(0)=\varphi_{1n}, \quad n=1,2,\dots. \tag{12}$$

Если учесть ортонормированность системы функций $X_n(x)$ функционал (7) принимает вид:

$$I[\bar{p}]=\sum_{n=1}^{\infty} I_n[p_n], \quad I_n[p_n]=\int_0^T p_n^2(t)dt. \tag{13}$$

Таким образом, задача приводится к определению управляющихпараметров $p_n(t)\in t_2(0,T)$, $n=1,2,\dots,$ такие, чтобы соответствующие им решения задачи (11)-(12) удовлетворяли условиям:

$$u_n(T)=\psi_n, \quad n=1,2,\dots, \tag{14}$$

и при этом функционал (13) принимал наименьшее возможное значение, где ψ_n коэффициенты Фурье функции $\psi(x)$.

Таккак коэффициенты Фурье $u_n(t)$ определяются (11)-(12) независимо друг от друга, то достаточно рассмотреть задачу минимизации функционала $I_n[p_n]$ для любого n.

3.Применение *l*-проблемы моментов.По формуле Коши решение уравнения (11) с начальными условиями (12) можно представить в виде:

$$u_n(t)=\varphi_{0n}\cos a^2\lambda_n^2 t+\frac{1}{a^2\lambda_n^2}\varphi_{1n}\sin a^2\lambda_n^2 t+\frac{a}{\lambda_n}\int_0^t \sin a\lambda_n(t-T)p_n(\tau)d\tau. \tag{15}$$

Тогда условие (14) можно записать в виде:

$$\varphi_{0n}\cos a^2\lambda_n^2 T+\frac{1}{a^2\lambda_n^2 T}\varphi_{1n}\sin a^2\lambda_n^2 T+\frac{a}{\lambda_n}\int_0^T \sin a\lambda_n(T-t)p_n(t)d\tau=\psi_n.$$

Отсюда получаем, что управляющий параметр удовлетворяет интегральному уравнению:

$$\frac{a}{\lambda_n}\int_0^T \sin a\lambda_n(T-t)p_n(t)d\tau=c_n, \tag{16}$$

где

$$c_n=\psi_n-\varphi_{0n}\cos a^2\lambda_n^2 T-\frac{1}{a^2\lambda_n^2 T}\varphi_{1n}\sin a^2\lambda_n^2 T.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Лемма. Для того, чтобы решение $U_n(t)$ задачи (11)-(12) удовлетворялоусловию (14), необходимо и достаточно, чтобы управление $p_n(t)$ удовлетворяло моментнымсоотношениям (16), при $n=1,2,\dots$.

Для определения оптимальных параметров $p_n(t)$ в пространстве $L_2(0,T)$ выделим одномерное пространство H_n элементов $q_n(t)$ определяемых формулой

$$q_n(t)=\alpha_n e_n(t), \quad e_n(t)=\frac{a}{\lambda_n}\sin a\lambda_n(T-t), \tag{17}$$

где α_n вещественные коэффициенты, которые подлежат определению.

По теореме Леви любой элемент $p_n(t)\in L_2(0,T)$ можно однозначно представить в виде [3]:

$$p_n(t)=q_n(t)+g_n(t), \quad q_n(t)\in H_n, \quad g_n(t)\perp H_n$$

и

$$\|p_n\|^2_{L_2(0,T)}=\|q_n\|^2_{L_2(0,T)}+\|g_n\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Для рассматриваемого случая

$$< g_n(t), q_n(t) > = \int_0^T g_n(t) q_n(t) dt = \frac{a\alpha_n}{\lambda_n} \int_0 g_n(t) \sin a\lambda_n (T-t) dt = 0,$$

и следовательно, слагаемое $g_n(t)$ не влияет на решение уравнения (16). Вместе с тем оно имеет отличную от нуля норму.
Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорем 1. Для того, чтобы управление $p_n(t)$ удовлетворяло моментным соотношениям (16), необходимо и достаточно, чтобы этим соотношениям удовлетворялапроекция $q_n(t)$ этого управления по подпространство H_n.

Таким образом если рассматриваемая задача оптимального управления имеет решение, то оно принадлежит H_n, т. е. может быть представлено в виде:

$$p_n(t) = \frac{a\alpha_n}{\lambda_n} \sin a\lambda_n (t-T). \qquad (18)$$

Для определения неизвестныхкоэффициентов α_n значение (18) подставим в (16):

$$\frac{a}{\lambda_n} \int_0^T \frac{a\alpha_n}{\lambda_n} \sin^2 a\lambda_n (T-t) dt = c_n$$

Отсюда после элементарных преобразований находим

$$\alpha_n = \frac{4c_n\lambda_n^3}{a2aT\lambda_n - \sin 2aT\lambda_n}.$$

И следовательно,

$$p_n(t) = \frac{a\alpha_n}{\lambda_n} \sin a\lambda_n (T-t) = \frac{4c_n\lambda_n^3}{2aT\lambda_n - \sin 2aT\lambda_n} \sin a\lambda_n (T-t). \qquad (18)$$

Соответствующее ему значение функционала I_n равно

$$I_n = \int_0^T p_n^2(t) dt = \frac{8c_n^2\lambda_n^3}{2a^2T\lambda_n - a\sin 2aT\lambda_n}.$$

В силу формулы (13) находим, что

$$I[\bar{p}] = \sum_{n=1}^{\infty} I_n[p_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8c_n^2\lambda_n^3}{2a^2T\lambda_n - a\sin 2aT\lambda_n}. \qquad (19)$$

Очевидно, что ряд в (19) будет сходится, если выполняется условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n[p_n] = c_n^2\lambda_n^2 < \infty, \qquad (20)$$

где коэффициенты c_n определяются по формуле (17).

Таким образом,установили справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть управляемый процесс описывается краевой задачей (1)-(4), где допустимыми управлениями являются произвольные функции $p = p(t,x) \in L_2(Q)$. Пусть, далее выполняется условие (20), где коэффициенты c_n определяются по формуле (17), а ψ_n, φ_{0n} и φ_{1n} коэффициенты Фурье функций $\psi(x)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, соответственно.Тогда, задача об управлении с минимальной энергией имеет единственное решение и это решение представимо в виде (18), а соответствующее минимальное значение функционала (7) вычисляется по формуле (19).

Литература

[1]. Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями. -М: Физматлит, 2004

[2]. Кулиев Г.Ф., Рамазанова А.Т. Об определении правых частей уравнений изгибно-крутильных колебаний стержня. Украинский Международный научно-технический журнал, JournalofAutomationandInformationSciences, Проблемы управления и информатики, DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i4, №4, 2016, с.74-85

[3]. Егоров А.И. О наблюдаемости упругих колебаний балки. Журнал вычислительной математики и математической физики, 2008, том 48, №6, с. 967-973

[4]. Егоров А. И. Основы теории управления -М.: Физматлит, 2004. -504с.

[5]. Маммаdov R, S., Qasimov S. Y. Solution of the synthesis problem of boundary optimal control of a rod cooling process with a heat conductive viscosity. “EUREKA” physics Engineering, Volume 4(10), 2017, p. 42-49.